PUISSANCE, TRAVAIL ET ENERGIE

1) PUISSANCE D'UNE FORCE

2) TRAVAIL D'UNE FORCE

3) THEOREME DE L'ENERGIE CINETIQUE

4) ENERGIE POTENTIELLE

5) ENERGIE MECANIQUE

6) CONDITION D'EQUILIBRE. STABILITE



PUISSANCE, TRAVAIL ET ENERGIE

1) PUISSANCE D'UNE FORCE

Définition :
Soit un point matériel M de masse m dans un repère R, animé d'une vitesse $\overrightarrow{V_R}(M)$ et soumis à une force $\vec{F}$ alors nous appellerons puissance de force P à l'instant t, le scalaire :

$$P = \vec{F} \, . \overrightarrow{V_R}(M)$$

L'unité de la puissance est le Watt (W).

2) TRAVAIL D'UNE FORCE

Définition :
Dans le repère R, le travail de la force $\vec{F}$ s'exerçant sur M entre les instants t_1 et t_2 est :

$$W = \int_{t_1}^{t_2} P \, dt = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \, . \overrightarrow{V_R}(M) \, dt = \int_{M_1}^{M_2} \vec{F} \, . \, \overrightarrow{dl}$$

L'unité du travail est le Joule (J).
Remarques :
- Le travail élémentaire de la force $\vec{F}$ dans R est

$$\delta W = \vec{F} \, . \overrightarrow{V_R}(M) \, dt = \vec{F} \, . \, \overrightarrow{dl}$$

Tout comme la puissance, le travail dépend du référentiel choisi (Galiléen ou pas).
On peut écrire aussi le travail élémentaire de la force $\vec{F}$

$$\delta W = \left\| \vec{F} \right\| \left\| \overrightarrow{dl} \right\| \cos \alpha$$

α est l'angle formé entre $\vec{F}$ et $\overrightarrow{dl}$



Le travail est positif (moteur) si $0 \le \alpha < \frac{\pi}{2}$

Le travail est négatif (résistant) si $\frac{\pi}{2} < \alpha \le \pi$

Le travail est nul si $\alpha = \frac{\pi}{2}$

- Le travail de la résultante de plusieurs forces pour un même déplacement est égal à la somme algébrique des travaux des différentes forces.

- ***Cas d'une force constante***

$$W = \int_{M_1}^{M_2} \vec{F} \, .\vec{dl} = \vec{F} \, . \left(\int_{M_1}^{M_2} \vec{dl} \right) = \vec{F} \, . \, \overrightarrow{M_1M_2} = \left\| \vec{F} \right\| \left\| \overrightarrow{M_1M_2} \right\| \cos\left(\vec{F}, \overrightarrow{M_1M_2} \right)$$

Dans le référentiel *R*, le travail ne dépend pas, dans ce cas, du chemin suivi.

- ***Cas d'une force dérivant d'une fonction de forces***

Si le travail élémentaire est une différentielle exacte, c.-à-d. qu'il existe une fonction *U* tel que $\delta W = dU$, on dit que le champ de forces $\vec{F}$ dérive d'une fonction de forces *U*. On aura donc

$$\vec{F} = \overrightarrow{grad} \; U \quad \text{et} \quad W = U(M_2) - U(M_1)$$

Le travail ne dépend pas du chemin suivi (trajectoire pour aller de M_1 à M_2).

Rappel :

Désignons par *f(x,y,z)* un champ scalaire et par $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ et $\frac{\partial f}{\partial z}$ les dérivées partielles par rapport à *x*, *y* et *z*. Le gradient du champ scalaire est par définition le vecteur

$$\overrightarrow{grad} \; f = \vec{\nabla} \; f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k} \text{, avec}$$

$$\vec{\nabla} = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

3) THEOREME DE L'ENERGIE CINETIQUE

Soit *R* repère Galiléen, et soit *M* un point matériel de masse *m*, en mouvement dans *R* et soumis à la résultante des forces $\vec{F}$. Le principe fondamental de la dynamique donne :



$$\vec{F} = m \left.\frac{d\vec{V_R}(M)}{dt}\right|_R \text{, or on a}$$

$$P = \vec{F}\,.\vec{V_R}(M) = \left(m \left.\frac{d\vec{V_R}(M)}{dt}\right|_R \right).\vec{V_R}(M) \text{, d'où}$$

$$P = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\left[\vec{V_R}(M)\right]^2\right) = \frac{dE_c}{dt} \text{, ce qui permet d'écrire}$$

$$P\,dt = dE_c \Rightarrow \partial W = dE_c \Rightarrow W = E_c^2 - E_c^1$$

D'où le ***théorème de l'énergie cinétique*** : Dans un référentiel Galiléen, la variation d'énergie cinétique d'un point matériel entre deux instants, est égale au travail de la somme des forces s'exerçant sur lui entre ces deux instants.

4) ENERGIE POTENTIELLE

Soit *M* un point matériel de masse *m*, en mouvement dans *R* repère Galiléen. Le point est soumis à la résultante des forces $\vec{F}$. On dit que $\vec{F}$ dérive d'une fonction de force *U*, si est seulement si la puissance peut de mettre sous la forme $P = \frac{dU}{dt}$. L'énergie potentielle est par définition

$$E_P = -U$$

D'où $P = \frac{-dE_p}{dt}$ autrement dit $P\,dt = \delta W = -\,dE_p \Rightarrow W = E_p^1 - E_p^2$

Le travail élémentaire est une différentielle totale. Dans ce cas particulier E_P est une fonction seulement du point *M*, position de la particule à l'instant *t* ; la résultante $\vec{F}$ est dite ***conservative*** dans ce référentiel. Nous avons dans ce cas les propositions équivalentes suivantes :

- $\vec{F}$ est conservative
- Le travail de $\vec{F}$ est indépendant du chemin suivi
- Le travail de $\vec{F}$ sur un parcours fermé est nul
- $\vec{F}$ peut s'écrire sous la forme $\vec{F} = -\,\overrightarrow{grad}\,E_p$
- $\overrightarrow{rot}\,\vec{F} = \vec{0}$

Rappel :

On appelle rotationnel d'un vecteur $\vec{V}(x, y, z)$ le vecteur $\overrightarrow{rot}\,\vec{V}$ défini par

$$\overrightarrow{rot}\vec{V} = \vec{\nabla} \wedge \vec{V} = \left(\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial x}{\partial z} - \frac{\partial z}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial y}\right)\vec{k}$$

Exemple de force conservative : Le poids $m\vec{g}$

$$P = m\vec{g} \cdot \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_R = \frac{d\left(m\vec{g} \cdot \overrightarrow{OM}\right)}{dt}$$

Donc $m\vec{g}$ dérive d'une fonction de force $U = m\vec{g} \cdot \overrightarrow{OM} + cte$ c.-à-d. $E_P = -m\vec{g} \cdot \overrightarrow{OM} + cte$
Soit Oz l'axe vertical ascendant du repère R. On trouve

$$E_P = m\,g\,z + cte$$

5) ENERGIE MECANIQUE

Nous étudions le mouvement d'un point matériel, dans le référentiel Galiléen, soumis à un champ de force $\vec{F}$ ***conservatif***. Appliquons le théorème de l'énergie cinétique

$$dE_c = \partial W = -\,dE_p \Rightarrow d\left(E_c + E_p\right) = 0, \text{ c.-à-d.}$$

$$E_c + E_P = cte = E_c^0 + E_p^0$$

E_c^0 et E_p^0 sont fixées par les conditions initiales. Cette quantité E_m=E_c+E_p, qui se conserve au cours du mouvement, est l'énergie mécanique du point matériel. Elle exprime une intégrale première du mouvement puisqu'elle relie les dérivées premières des coordonnées par rapport au temps.

Cas de forces non conservatives : le frottement par exemple

Décomposant la résultante des forces $\vec{F}$ en une force conservative $\vec{F_c}$ qui effectue un travail $W_c = E_p^1 - E_p^2$ et une force dissipative $\vec{F_d}$ qui effectue un travail W_d. Le théorème de l'énergie cinétique, valable dans tous les cas, s'écrit donc

$$W = W_d + W_c = E_c^2 - E_c^1, \text{ soit}$$

$$W_d = \left(E_c^2 - E_c^1\right) - \left(E_p^1 - E_p^2\right) = \left(E_c^2 + E_p^2\right) - \left(E_c^1 + E_p^1\right) = E_m^2 - E_m^1$$

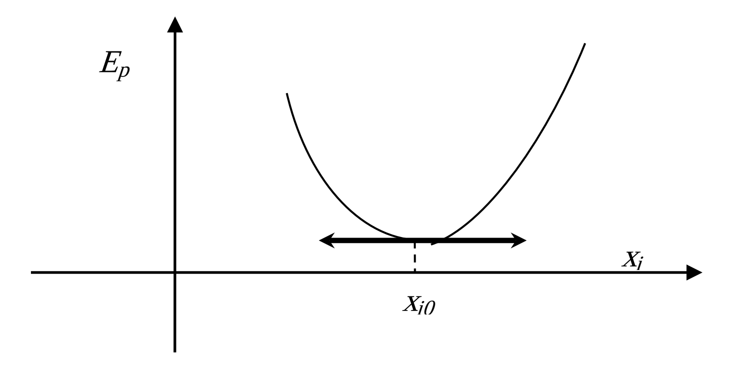
La perte de l'énergie mécanique est mesurée par le travail des forces dissipatives.



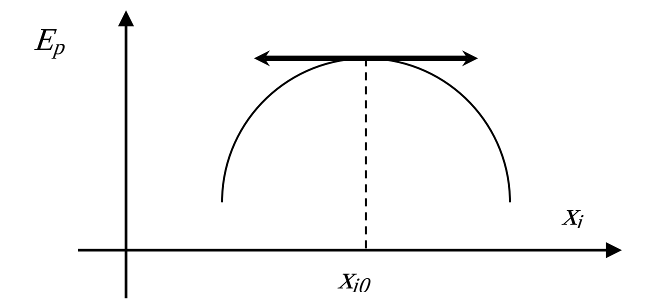
6) CONDITIONS D'EQUILIBRE. STABILITE

On sait que la condition nécessaire d'équilibre d'un point matériel M dans un repère R est que la force appliquée soit nulle. Lorsque les forces dérivent d'une énergie potentielle E_p (fonction de la coordonnée x_i), la condition d'équilibre est équivalente à $\frac{dE_p}{dx_i} = 0$.

Si E_p est minimale, l'équilibre est stable, dans ce cas $\frac{d^2E_p}{dx_i^2} > 0$



Si E_p est maximale, l'équilibre est instable, dans ce cas $\frac{d^2E_p}{dx_i^2} < 0$




ETUSUP.com


ETUSUP
.com